Cours n°2

Analyse

I _ Calcul de primitives

Soient :

_ une fonction f continue et définie sur [a ; b] et f(x) g þ

_ C_f est la courbe représentative de f

A. Définitions

1) L'aire

Lorsque f U 0, on note l'aire comprise entre C_f, $C_{x=a}$ et $C_{x=t}$:

A (t) = € $_a^b$ f(x)dx pour t g [a ; b]

à Si f a un signe quelconque, on transforme ses valeurs négatives en valeurs positives puis on applique la même formule.

2) Propriétés

Soit A' (t) = f(t).

3) Définition

Une fonction F est dite primitive de f si F' = f.

Remarques : _ la fonction "aire" est une primitive de f

_ On note € f une primitive quelconque de f

4) Équations différentielles

Cela revient à chercher toutes les fonctions y qui vérifient y' = f

z Notations de Leibniz :

dy / du = f(u) ó dy = f(u)du ó y = € f(u)du

5) Propriétés

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

S = { € $_a^x$ f(u)du + k ; k g þ }

6) Notation

F(t) = € $_a^t$ f(u)du + k et F(a) = € $_a^a$ f(u)du + k = k

D'où € $_a^b$ f(x)dx = F(b) – F(a) = [F(x)]^a_b

7) Propriétés

€$_a^b$ f(x)dx = -€$_b^a$ f(x)dx

€ [f(x) + g(x)]dx = € f(x)dx + € g(x)dx

8) Remarque

€ f * g @ €f * €g

II Techniques de calcul

A. Lecture des tables

On lit la table de dérivation à l'envers.

F(x)	*F'(x)*
k	0
ax + b	a
u^n / n	$u'u^{n-1}$
ln |u|	u' / u
e^u	$u'e^u$
cos x	- sin x
sin x	cos x

(toutes les primitives ont [+ k], une constante)

B. Changement de variable

Soient f[a ; b] à þ , u[a ; b] à [c ; d] continues et dérivables

Propriété : Si F est une primitive de f, alors F u est une primitive de u' * (f u).

(f u)'(x) = f'[u(x)] * u'(x)

C. Intégration par parties

Soient u, v : [a ; b] à þ continues et dérivables

Propriété :

€u'v = [uv] - €uv'

II Équations différentielles de premier ordre

A. Équation différentielle linéaire de premier ordre

Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées successives. Une équation différentielle de premier ordre est une équation différentielle de la forme :

$$y' + a(x) * y = b(x)$$

Soit l'équation sans deuxième membre : $y' + a(x) * y = 0$. On appelle A(x) la primitive de a(x). Alors les solutions de cette équation sont :

$$S = \{ y = Ce^{A(x)}, C \text{ g þ } \}$$

Pour trouver une solution générale (pour remplacer C), on considère C comme une fonction relative à x, C(x). On dérive la solution de l'équation sans deuxième membre, puis on remplace le résultat dans la solution.

La solution particulière est $y_{part} = C(x)e^{A(x)}$ et la solution générale est $f(x) = y + y_{part}$.

Ex : Soit $y' = 3y + e^{2x}$

Solution de $y' = 3y$: $S = \{ y = Ce^{3x}$, C g þ }

Ainsi on a pour C = C(x) : $y' = (C(x)e^{3x})' = e^{3x} * [C'(x) + 3C(x)]$

Et $y' = 3y + e^{2x}$

à $3Ce^{3x} + e^{2x} = e^{3x} * [C'(x) + 3C(x)]$ ó $C'(x) = e^{-x}$ è $C(x) = - e^{-x}$

Ainsi $f(x) = Ce^{3x} – e^{2x}$

Propriété : Soit l'équation différentielle : $y' + a(x) * y = b(x)$. On appelle A(x), la primitive de a(x) et B(x), la primitive de $b(x)e^{-a(x)}$. Alors la solution générale de l'équation est :

$$S = \{ y = B(x) + k * e^{a(x)} \}$$

B. Équation différentielle à variables séparées

Une équation différentielle de la forme $y' = u(x) | v(y)$ où u et v sont deux fonctions continues est dite une équation différentielle à variables séparées.

Propriété : On a la relation $C + v(y) = u(x)$.

C. Application

L'évolution de nombreux systèmes naturels est décrite par des équations différentielles ; leur résolution permet de prédire l'évolution de tels systèmes.

Soit N(t), l'effectif d'une population. Au temps Ç t supposé petit, on a la variation de N(t) notée Ç N(t).

l Si le milieu n'est pas modifié par la valeur de N, on écrit :

Ç N(t) = k * N(t) * Ç t (k g þ)

Si k ne dépend ni de N, ni de t, on écrira :

Ç N(t) / Ç t = k * N(t) et on peut alors résoudre l'équation différentielle de premier. On obtient : $N(t) = N_0e^{kt}$.

l Si k dépend de N(t) sans dépendre de t :

$k(N) = k (N_{stable} – N(t))$ avec k > 0, N > 0 et N_{stable} = cte

Soit N'(t) = k(N) * N(t) :

On résout et on trouve $N(t) = N_{stable} / (1 + ke^{-kNt})$ avec $k = [N_{stable} – N(0)] / N(0)$

Interprétation : N_{stable} est l'effectif que le milieu peut entretenir de manière stable. La population augmente si $N(t) > N_{stable}$ et diminue si $N(t) < N_{stable}$.

Loi de refroidissement de Newton :

La température $T(t)$ d'un corps placé dans un milieu ambiant à température constante vérifie l'équation différentielle :

$$y' = b(a - y) \text{ avec } b > 0$$

$$\text{d'où } y(t) = Ce^{-bt} + a \text{ et } C = y(0) - a$$

D. Équation différentielle se ramenant à une équation différentielle linéaire de premier ordre

Équation différentielle de Bernoulli :

De la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^n$

On pose alors $z = y^{1-n}$ pour obtenir une équation différentielle de premier ordre.

Équation différentielle de Ricatti :

De la forme : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

Si on connaît une solution particulière $\emptyset(x)$, on pose $y = \emptyset + z^{-1}$ pour obtenir une équation différentielle de premier ordre.