Cours n°1

Probabilités

Introduction

En probabilités, la répartition ou le tirage est “au hasard“ si le tirage ne favorise pas un résultat particulier (ils sont équiprobables).
Ex : Jet d’un dé

Les probabilités dépendent de la connaissance ou de l’ignorance que l’observateur a du système.

I_Vocabulaire

1.Univers et éventualités

Prenons pour exemple le jet d’un dé à 6 faces.

Il y a 6 éventualités possibles soit six résultats possibles : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

L’univers est l’ensemble des éventualités. Il s’écrit Ð .
Ici, Ð = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}

Les éventualités doivent être exclusives l’une de l’autre, c’est-à-dire que si une éventualité est arrivée, les autres ne peuvent plus arriver.

On peut choisir : Ð = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6} ou Ð = {pair ;impair}.
Mais on ne peut pas choisir : ~~Ð = {pair ;1 ;2 ;3 ;4}~~ car 4 et pair ne sont pas exclusives.

à Un univers peut être infini.
Ex : Une éventualité est le nombre de jets de dé jusqu’à ce qu’un 1 apparaisse.
Ð = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;…} = û *

2.Théorie des ensembles

Un ensemble est une “collection d’objets“.
Ex : E = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7}

Un élément est un “objet“.
Ex : 3

Le cardinal d’un ensemble est le nombre d’éléments de cet ensemble. Il s’écrit card(E).

Ex : card(E) = 7

“x appartient à E“ peut s’écrire x g E. L’inverse s’écrirait x h E.

Un sous-ensemble de E est une partie de E.
à Si A est un sous-ensemble de E, alors on peut écrire A _ E (on dit que A est inclus dans E). On dit aussi que E recouvre A.

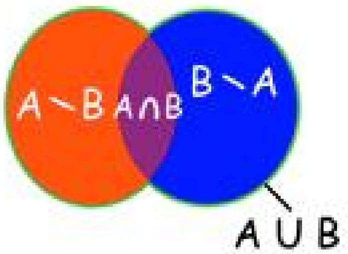
Un ensemble sans élément est appelé ensemble vide et s’écrit Ÿ .

L’ensemble des parties de E s’écrit P(E).

Ex : E = {1 ;2}
Donc on a P(E) = {Ÿ ;1 ;2 ;E}

Soient A et B, deux ensembles.

Leur intersection s’écrit A 0 B (A inter B).
Leur union s’écrit A N B (A union B).
Leur différence s’écrit A ~ B (A moins B).



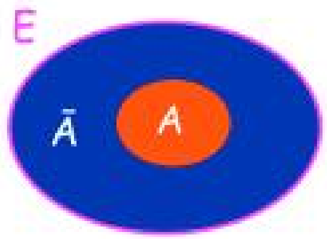
à Deux ensembles A et B sont disjoints si A 0 B = 0.

Soient A et E deux ensembles tels que A _ E.

Le complémentaire de A dans E s’écrit [$_E$A et E est l’ensemble de référence.

Deux ensembles sont complémentaires par rapport à un ensemble de référence lorsqu’à eux deux ils représentent l’ensemble de référence un seule fois.

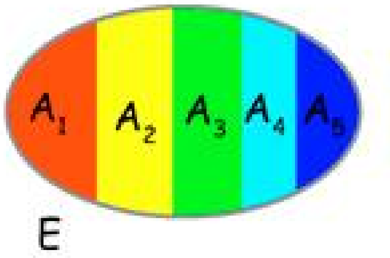
Alors on a : [$_E$A = E ~ A
Lorsque l’ensemble de référence est déterminé, on notera : [$_E$A = A:



Soient A_1, A_2, A_3, … A_n, n ensembles.

On dit que {A_1 ;A_2 ;A_3 ; … A_n} est une partition de E si :

_ Les ensembles ne sont <u>pas des ensembles vides</u>
_ Les ensembles sont <u>disjoints</u>
_ A_1 N A_2 N A_3 N … A_n = E



3.Événements

Un événement est une <u>partie de l'univers</u>, c'est un <u>ensemble d'éventualités</u>.

Si une éventualité est réalisée, alors <u>tous les événements qui contiennent cette éventualité</u> sont <u>réalisés</u>. Et ceux qui ne la <u>contiennent pas</u> ne sont <u>pas réalisés</u>.

Ex : On obtient 1.
Événements réalisés : {1}, impair, {1 ;3 ;4}, Ð , etc …
Événements non-réalisés : Ÿ , pair, {2 ;3 ;4}, etc …

<u>Cas particuliers</u> : _ Ÿ est un événement impossible
_ Ð est un événement certain
_ {1}, {2}, {3}, etc … sont des <u>événements élémentaires</u>.

L'événement "A et B" se note A 0 B ou AB.
L'événement "A ou B" se note A N B.

Des événements sont dits contraires s'ils sont <u>complémentaires dans l'univers</u>.

Ex : Ð = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}
Ÿ est l'événement contraire de Ð .
{1 ;3 ;6} est l'événement contraire de {2 ;4 ;5}.
[$_Ð$ A = A est l'événement contraire de A.

Des événements sont dits incompatibles s'ils sont <u>disjoints</u>, c'est-à-dire, s'ils n'ont <u>aucun élément en commun</u>.

Ex : {1 ;5} et {2 ;4}

Lorsque A _ B, A implique B. En effet, les événements de A sont dans B donc lorsque A est réalisé, B l'est aussi.

<u>Mais</u> B peut être réalisé lorsque A ne l'est pas.
Ex : {1 ;3} entraîne impair.

II_Probabilité : Définitions, propriétés

1.Définitions

P est une probabilité, si : _ Pour tout A _ Ð , P(A) Ù 0 (axiome de positivité)
_ P(Ð) = 1 (axiome d'échelle)
_ Pour tout A _ Ð et B _ Ð (axiome d'additivité)
à Si A 0 B = 0 (événements incompatibles)
Alors P(A N B) = P(A) + P(B)
à Si Ð est infini et que les événements sont incompatibles, la probabilité de l'union des événements vaut la somme des probabilités des événements

2.Propriétés

_ P(Ÿ) = 0
_ P($\bar{A}$) = 1 – P(A)
_ P({a ;b ;c ;d}) = P({a}) + P({b}) + P({c}) + P({d})
_ P(B ~ A) = P(B) – P(A)
_ P(A N B) = P(A) + P(B) – P(A 0 B)
_ Si A _ B, alors P(A) < P(B)

Remarque : Par besoin de clarté, si a est une éventualité de Ð , on écrira P(a) à la place de P({a}).

III_Choix d'une probabilité

1.Appui des symétries

Quand aucune probabilité n'est privilégiée, on parle de symétrie. On fait donc l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires. (axiome d'additivité)

Ex : Jet d'un dé
Ð = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}, d'où P(Ð) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)

Il faut ensuite s'assurer que l'axiome d'échelle est respecté.
è Si les événements élémentaires sont équiprobables et forment l'univers, chaque événement vaudra :

P(a) = 1 / card(Ð)

Ex : P(Ð) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)
= 6 * P(1)
= 6 * 1 / 6
= 1

On déduira de cette formule, pour calculer la probabilité d'un événement :

$$P(A) = card(A) / card(Ð\ )$$

<u>Remarque</u> : L'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires est souvent une approximation.

2.Utilisation de l'indépendance physique des événements

Ex : Jet de deux dés è les résultats sont indépendants.

$P(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 3) = P(X_1 = 1) * P(X_2 = 3) = (1 / 6) * (1 / 6) = 1 / 36$

3.Estimation d'une probabilité par une fréquence

Ex : Jet d'un dé pipé 1000 fois. On dénombre 351 fois le résultat 1.
P(1) = 351 / 1000 = 0,351

4.Choix arbitraire dans le cas d'un modèle probabiliste que l'on vérifie après l'expérience

è Il faut <u>respecter les axiomes de probabilité</u>.

IV Probabilités conditionnelles

1.Définition

Si l'on sait qu'un événement est réalisé mais que l'on ne sait pas quelle est l'éventualité réalisée, les probabilités devraient changer.

Ex : Après avoir jeté un dé, on obtient un résultat pair. On a donc :

$P_{pair}(impair) = P_{pair}(1) = P_{pair}(3) = P_{pair}(5) = 0$
$P_{pair}(2) = P_{pair}(4) = P_{pair}(6) = 1 / 3$

On appelle probabilité conditionnelle sachant X d'un événement (noté P(A / X) ou $P_X(A)$) le rapport :

$$P(A / X) = P_X(A) = P(A\ 0\ \ X) / P(X)$$

2.Théorème des probabilités composées

$P(X) * P_X(Y) = P(X\ 0\ \ Y)$

On en déduit ainsi les <u>propriétés</u> :
<u>Contraire du contraire</u> :
_ [Þ ([Þ A) = A

e <u>Contraire des unions</u> :
_ [Þ (A N B) = ([Þ A) N ([Þ B)
_ [Þ (A 0 B) = ([Þ A) 0 ([Þ B)

e <u>Commutativité</u> :
_ A N B = B N A
_ A 0 B = B 0 A

- Associativité :

$\Rightarrow (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

$\rightarrow$ de même pour l'intersection

- Distributivité :

$\Rightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cup C)$

$\rightarrow$ et inversement

- Ensembles vides :

$\Rightarrow A \cup \varnothing = A$

$\Rightarrow A \cap \varnothing = \varnothing$

3.Probabilités des causes (formule de Bayes)

Soient $\{B_1 ; B_2 \ldots B_n\}$ une partition de Ω .

$A \subset \Omega$, on a donc : $A = (A \cap B_1) + \ldots + (A \cap B_n)$

$\rightarrow$ les $(A \cap B_i)$ sont incompatibles.

$P_A(B_i) = P(A \cap B_i) / P(A) = P(B_i) * P_{Bi}(A) / P(A)$

A et B indépendants en probabilité $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\bar{B}$ indépendants

$\Leftrightarrow$ A et B indépendants

Méthodes :

1) Établir l'indépendance d'événement :
   a) montrer que les événements sont indépendants physiquement
   b) vérifier les relations de définition ou utiliser des théorèmes
2) Pour montrer que deux événements sont liés physiquement, on démontre qu'ils ne sont pas indépendants en probabilités
3) h A et B indépendants en probabilités ne veut pas dire qu'ils sont indépendants physiquement
4) h Ne pas confondre
   - des événements indépendants $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
   - des événements incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

VI Variables aléatoires discrètes

A.Définition

Une variable aléatoire est une application dont l'ensemble est muni d'une probabilité.

Soit Ω , un ensemble quelconque : $\Rightarrow$ P est une probabilité définie sur Ω
$\Rightarrow$ E est un ensemble quelconque

$\rightarrow$ Une application X de Ω dans E sera donc appelée une variable aléatoire.

h X est une fonction et non une variable

Remarque : X est une variable aléatoire discrète si E est dénombrable.

Lorsque c'est dénombrable, on associe un nombre à chaque élément.
à û , ü et ý sont dénombrables. þ n'est pas dénombrable.

à On appelle X(Þ) l'ensemble des valeurs prises par X.
Ex : Dé : X(Þ) = {1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6}

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète donne la probabilité pour une valeur de X d'avoir cette valeur :

k			
P(X=k)			

La fonction de répartition d'une variable aléatoire est la fonction qui à x associe P(X<x). Elle permet de trouver la loi de probabilité.

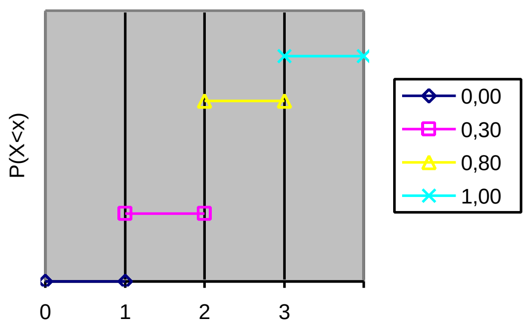
Ex : une urne contient 3 boules n°1, 5 boules n°2 et 2 boules n°3. On tire une boule au hasard.

X est l'application qui à chaque boule associe son numéro. On a X(Þ) = {1 ;2 ;3} et chaque événement élémentaire de Þ a une probabilité de 1/10.

Loi de probabilité :

k	1	2	3
P(X=k)	3/10	5/10	2/10

Fonction de répartition



VII Espérance Mathématique

A. Définition

Þ = {x_1 ;x_2 ;… ;x_n}
X est une variable aléatoire sur Þ .

On appelle l'espérance mathématique de X notée E(X) le nombre :
$E(X) = P(X = x_1) * x_1 + P(X = x_2) * x_2 + \dots + P(X = x_n) * x_n$

E(X) = Ì P(X = x_i) * x_i

$E(X)$ est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leur probabilité.

B.Linéarité de E

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$
$X, Y, X_1, X_2, \dots X_n$ sont des variables aléatoires numériques discrètes sur Ω .

Alors on a :
$E(aX + b) = a * E(X) + b$
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
$E(X_1 + X_2 \dots X_n) = E(X_1) + E(X_2) \dots E(X_n)$

Si X est une constante, alors $X(x_i) = C$ et $E(X) = C$.

C.L'espérance mathématique est une moyenne

D.Espérance mathématique conditionnelle de X sachant A

C'est l'espérance de X en remplaçant P par P_A ; on la note $E_A(X)$ (ou $E(X / A)$).

$$E_A(X) = \Sigma \; P(X = x_i)_A * x_i$$

E.Variable aléatoire centrée

C'est une variable aléatoire d'espérance nulle.
Soit X une variable aléatoire, alors $X – E(X)$ est la variable aléatoire centrée associée à X.
$\Rightarrow$ $E(X – E(X)) = E(X) – E(X) = 0$

VIII Variance, écart-type d'une variable aléatoire numérique discrète

A.Définition

La variance de X s'écrit $Var(X)$.
$Var(X)$ est la moyenne pondérée des carrés des écarts des valeurs à leur moyenne.
Ceci permet d'évaluer la dispersion autour de la moyenne.
On appelle écart-type et on note σ_X (ou σ), la racine carrée de $Var(X)$:

$$\sigma_X = (Var(X))^{½}$$

B.Calcul

$$Var(X) = E(X^2) – [E(X)]^2$$

Mnémotechnie : variance = moyenne des carrés – carré de la moyenne

C.Exemple

On a trois boules n°1, 5 boules n°2 et 2 boules n°3.
$E(X) = 19 / 10$ $\sigma_X = 0,5^{½}$

D.Signification des variances et écart-types

E.Propriétés

_ Si X = cte, alors Var(X) = 0
_ Var (aX + b) = a² * Var(X)
_ â$_{aX + b}$ = |a| * â$_X$
_ Soit k > 0 è P (|X – E(X)| > k * â$_X$) < 1 / k²
Ex : k=3, alors la valeur de X a 1 / 9 chances d'avoir une valeur non comprise entre E(X) – 3â et E(X) + 3â

F. Variable aléatoire centrée réduite

Soit X, une variable aléatoire sur Ð .

Soit Y = [X – E(X)] / â
On dit que Y est la variable aléatoire centrée réduite de X.
à centrée signifie E(Y) = 0
à réduite signifie Var(Y) = 1

IX Indépendance des variables aléatoires discrètes

A. Définition

Soit X_1, X_2, … X_n des variables aléatoires, alors on a :
X_1, X_2, … X_n sont indépendantes ó {X_1=a}, {X_2=b}, … {X_n=z} sont indépendants

B. Théorème

Si deux variables aléatoires sont indépendantes, alors les différentes valeurs que chacune peut prendre sont indépendantes.

C. Relation des espérances

Si deux variables aléatoires sont indépendantes, alors E(X * Y) = E(X) * E(Y).
h La réciproque est fausse.

D. Relation des variables

Si deux variables aléatoire sont indépendantes, alors Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)

E. Du monde réel au monde des mathématiques

Si des variables aléatoires ont des supports physiques indépendants, alors elles sont indépendantes en probabilité.

X Quelques lois discrètes

A. Loi uniforme discrète

X(Þ) = {1,2,…n} où n g û

P(X = 1) = P(X = 2) = … = P(X = n) = 1 / n

$$E(X) = (n + 1) / 2 \text{ et } Var(X) = (n^2 -1) / 12$$

Ex : X(Þ) = {1,2,…6} ou X suit une loi uniforme discrète de paramètre 6.
Alors on a : E(X) = 3,5 et Var(X) = 35 / 12

B. Loi de Bernoulli

X(Þ) = {0,1}
P(X = 1) = p et P(X = 0) = 1 – p = q

à E(X) = p et Var(X) = pq

Ex : soit un dé dont deux faces sont marquées 1.
P(X = 1) = p = 1 / 3
è X suit une loi de Bernoulli de paramètre 1 / 3 donc E(X) = 1 / 3 et Var(X) = 2 / 9.

C. Loi binomiale

X(Þ) = {1,2,…n} où n g û et P(X = 1) = p

Alors X X B(n ; p) :

$$P(X = i) = (^p{}_i) * p^i * (1 - p)^{n - i}$$
$$E(X) = np$$
$$Var(X) = np - np^2$$

On sait alors que <u>X est le nombre de succès</u> lors de <u>n épreuves</u> avec une <u>probabilité de succès de p</u>.

XI _ Variables aléatoires absolument continues

A. Définition

Soit X, une variable aléatoire sur Þ . X(Þ) n'est pas dénombrable.
Soit F la fonction de répartition de X.

F' = f s'appelle la densité linéaire de probabilité ponctuelle ou encore la densité de X.

B. Propriétés

_ Pour tout x_0 g X(Þ) è P(X = x_0) = 0
à Donc P(X T x) = P(X < x) + P(X > x) = P(X < x)
de même P(a T X T b) = P(a < X < b)
_ f(x) = F'(X) U 0 car F est croissante.

_ €$_a^b$ f(x)dx = F(b) – F(a) = P(X < b) – P(X < a) = P(a < X < b)

De même : F(b) = P(X < b) = $^{\text{lim}}$$_{a_{à}\ \text{-b}}$ €$_a^b$ f(x)dx = €$_{\text{-b}}^{b}$ f(x)dx = 0

Et €$_{-'}^{+'}$ f(x)dx = P(Ð) = 1

C. Espérance mathématique

Définition :

E(X) = €$_{-'}^{+'}$ [x * f(x)]dx = 0

Si l'intégrale existe.

D. Variance et écart-type

Var(X) = E[(x - E(X))²] = €$_{-'}^{+'}$ ([x – E(X)]² * f(x))dx

XII Variables aléatoires normales, loi de Laplace – Gauss

A. Définition

On dit que X suit une loi de Laplace – Gauss :

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

On note cette loi N (Ü,â).

X sera dite normale centrée réduite, si â = 1 et Ü = 0,

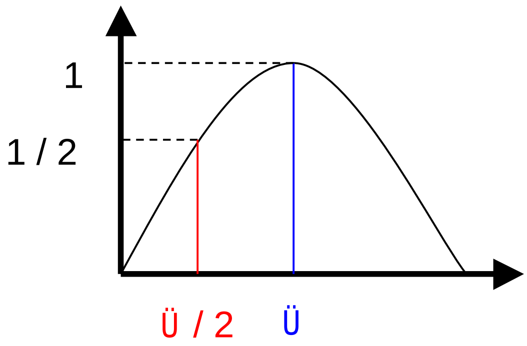
et on a f(x) = (1 / (2à)^{½}) * e$^{-x²/2}$.

B. Application

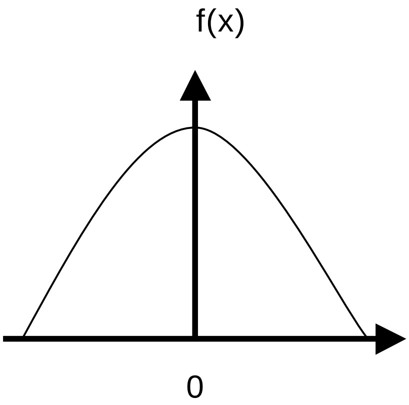
E(X) = Ü ; Var(X) = â ²

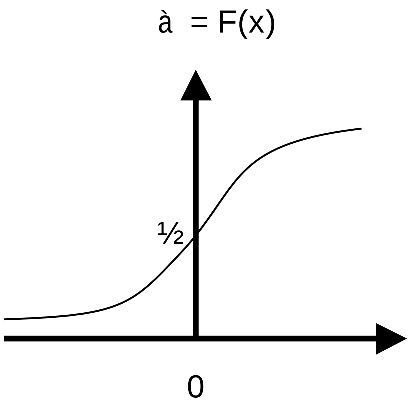
C. Représentation graphique

N (Ü,â)



D. Loi N (0,1)





E. Combinaison linéaire

Si X_1, X_2 … X_n sont des variables indépendantes de lois respectives N(Ü$_1$,â$_1$), N(Ü$_2$,â$_2$) … N(Ü$_n$,â$_n$), alors X1 + X2 … Xn suit une loi normale de paramètres Ü$_1$ + Ü$_2$ … Ü$_n$ et (â$_1^2$ + â$_2^2$ … â$_n^2$)^{½}.

à On fait la <u>somme des espérances et des variances</u>.

Si XX N(Ü,â), alors E(X) = Ü et â$_X$ = â.

Et aX + b suit N(aÜ + b, |a|â).

F. Centrage et réduction

Si X suit N(Ü,â), alors Y = (X - Ü) / â suit une loi N(0,1).

G. Utilisation des tables

à Utilisation de la fonction de répartition de N(0,1) : à

_ Soit XX N(Ü,â) alors [Y = (X - Ü) / â]X N(0,1)

è P(x_1 < X < x_2) = P((x_1 - Ü) / â < Y < (x_2 - Ü) / â)
= P(Y < (x_2 - Ü) / â) - P((x_1 - Ü) / â < Y)
= à ((x_2 - Ü) / â) – [1 - à ((x_1 - Ü) / â)]

_ Si y > 0, alors à (y) est donné dans la table.
_ à (y) = 1 – à (-y)

H. Approximation

<u>Binomiale par Gauss</u> :

XX B(n,p)

Quand n est grand et quand p n'est ni grand, ni petit, on peut assimiler X à une loi normale de même E(X) de même â$_X$: N(np,(npq)^{½}).

è P(X = h) = P(h - ½ < X < h + ½)

à Centrage et réduction : Y = [X – E(X)] / â$_X$ et YX N(0,1) :

P(X = h) = à [(h – ½ – np) / (npq)^{½}] - à [(h + ½ – np) / (npq)$^{½]}$